Aplicações dos princípios aditivo e multiplicativo

Raquel de Souza Francisco Bravo

e-mail: raquelbr.ic@gmail.com

18 de abril de 2017

Objetivo:

- Obtenção de uma técnica de contagem para cada problema (de permutação, de arranjo, de combinação) a partir dos princípios aditivo e multiplicativo (isto é, sem a enumeração explícita dos seus elementos).

Aplicações dos princípios aditivo e multiplicativo

Importância:

- As permutações, os arranjos e as combinações aparecem na modelagem de problemas provenientes, principalmente, das seguintes áreas:
  - probabilidades
  - teoria de grafos
  - análise de algoritmos

Importância:

- As permutações, os arranjos e as combinações aparecem na modelagem de problemas provenientes, principalmente, das seguintes áreas:
  - probabilidades
  - teoria de grafos
  - análise de algoritmos

Exemplos:

- Algoritmos randômicos (probabilísticos)

Aplicações dos princípios aditivo e multiplicativo

Importância:

- As permutações, os arranjos e as combinações aparecem na modelagem de problemas provenientes, principalmente, das seguintes áreas:
  - probabilidades
  - teoria de grafos
  - análise de algoritmos

Exemplos:

- Algoritmos randômicos (probabilísticos)
- Armazenamento de informações em banco de dados nos computadores

Aplicações dos princípios aditivo e multiplicativo

Importância:

As permutações, os arranjos e as combinações aparecem na modelagem de problemas provenientes, principalmente, das seguintes áreas:

- probabilidades
- teoria de grafos
- análise de algoritmos

Exemplos:

- Algoritmos randômicos (probabilísticos)
- Armazenamento de informações em banco de dados nos computadores
- Análise do comportamento de um algoritmo através da contagem das suas operações.

Introdução

Exemplo 1:

(a) Comprei três canetas de distintas cores: **azul**, **verde** e branca, para dar de presentes a três amigos, João, Rita e Luiza.

(b) Comprei mais uma caneta, de cor **preta**, pois tinha esquecido do Gabriel.

Em cada caso, de quantas maneiras diferentes eu posso distribuí-las?

Resolução:

(a) João Rita Luiza

Permutações Simples e Circulares

Resolução:

(a)

João	Rita	Luiza
azul	verde	branca
	branca	verde

Permutações Simples e Circulares

Resolução:

(a)

	João	Rita	Luiza
	azul	verde	branca
		branca	verde
	verde	azul	branca
		branca	azul

Permutações Simples e Circulares

Resolução:

(a)

João	Rita	Luiza
azul	verde	branca
	branca	verde
verde	azul	branca
	branca	azul
branca	azul	verde
	verde	azul

Resolução:

(a)

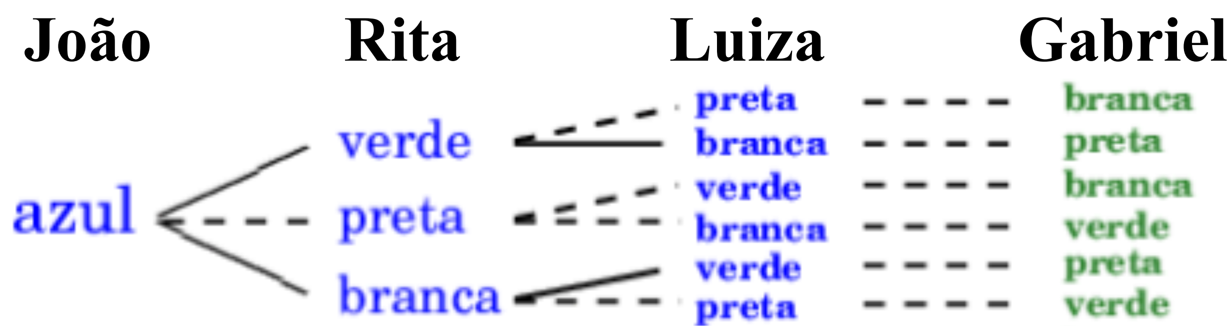
	João	Rita		Luiza
	azul	verde	—	branca
		branca	—	verde
	verde	azul	—	branca
		branca	—	azul
	branca	azul	—	verde
		verde	—	azul
Número de possibilidades:	3	$\times$ 2	$\times$	1

Permutações Simples e Circulares

(b) João Rita Luiza Gabriel

Permutações Simples e Circulares

(b)

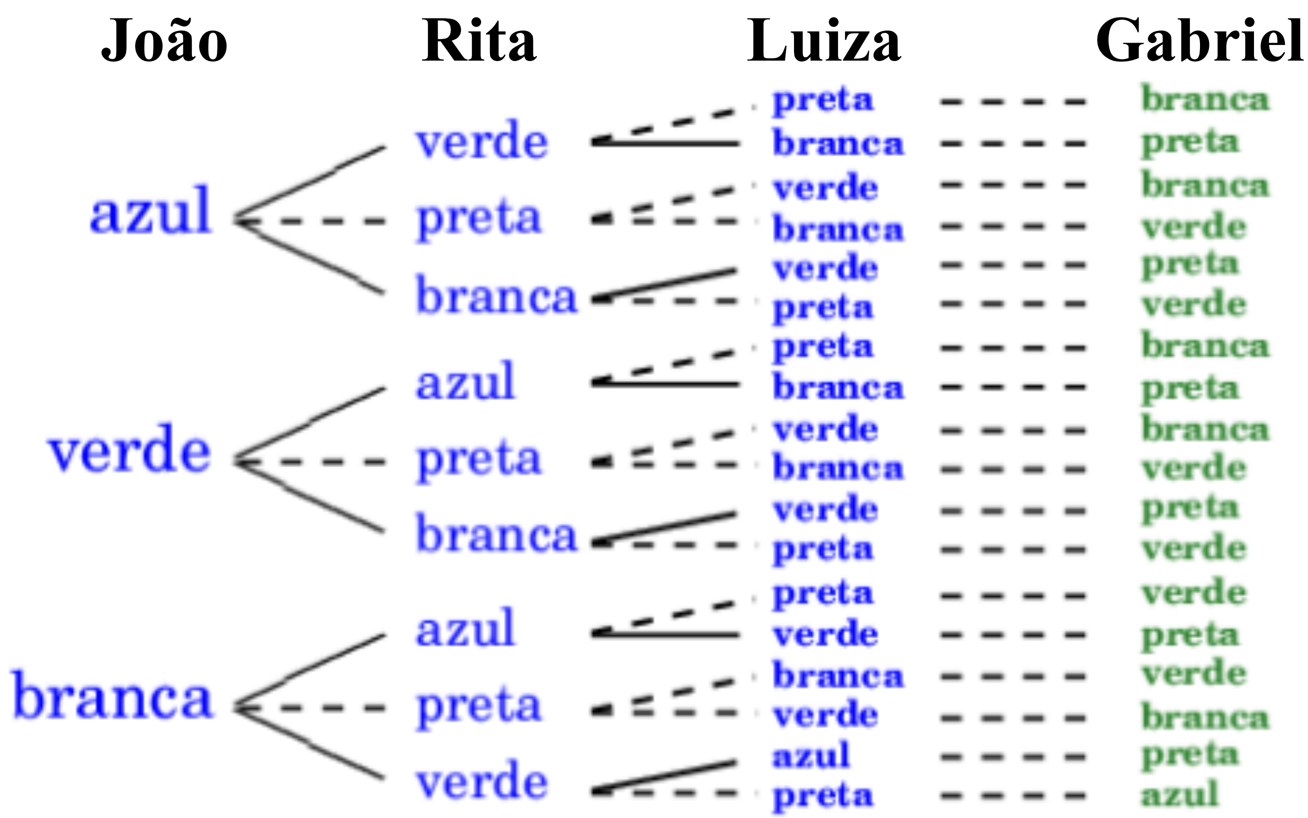


Permutações Simples e Circulares

(b)

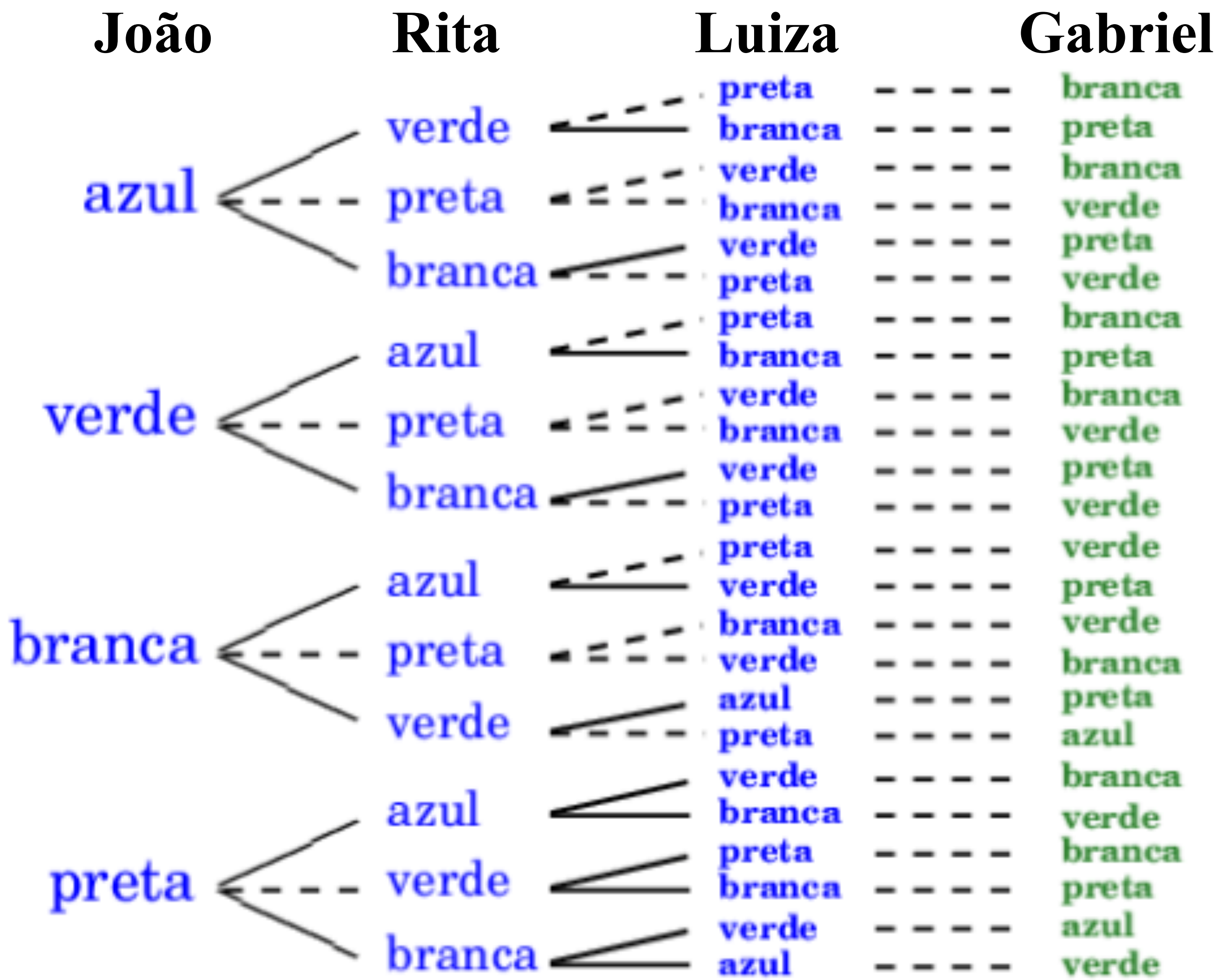
Permutações Simples e Circulares

(b)



Permutações Simples e Circulares

(b)



Permutações Simples e Circulares

(b)

João	Rita	Luiza	Gabriel
azul	verde	preta	branca
		branca	preta
	preta	verde	branca
		branca	verde
	branca	verde	preta
		preta	verde
verde	azul	preta	branca
		branca	preta
	preta	verde	branca
		branca	verde
	branca	verde	preta
		preta	verde
branca	azul	preta	verde
		verde	preta
	preta	branca	verde
		verde	branca
	verde	azul	preta
		preta	azul
preta	azul	verde	branca
		branca	verde
	verde	preta	branca
		branca	preta
	branca	verde	azul
		azul	verde

Possibilidades: $4 \times 3 \times 2 \times 1$

Fatorial de um número:

Definição

O fatorial de um número natural n, denotado por n! é o produto dos n primeiros números naturais:

$$n! := n(n-1)(n-2) \ldots 1$$

Fatorial de um número:

Definição

O fatorial de um número natural n, denotado por n! é o produto dos n primeiros números naturais:

$$n! := n(n-1)(n-2)\ \dots\ 1$$

Ilustração

$$3! = 3 \times 2 \times 1$$

Fatorial de um número:

- Definição

O fatorial de um número natural n, denotado por n! é o produto dos n primeiros números naturais:

$$n! := n(n-1)(n-2)\ \dots\ 1$$

- Ilustração

$$3! = 3 \times 2 \times 1$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Fatorial de um número:

- Definição

O fatorial de um número natural n, denotado por $n!$ é o produto dos n primeiros números naturais:

$$n! := n(n-1)(n-2)\ldots 1$$

- Ilustração

$$3! = 3 \times 2 \times 1$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

- Convenção:

$$0! := 1$$

Permutações Simples e Circulares

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9 ?

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9 ?

Resolução:

3
5
7
8
9

Possibilidades: $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$

p_1 p_2 p_3 p_4 p_5

posições dos dígitos no número

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9 ?

Resolução:

3
5
7
8
9

Possibilidades: ____ ____ ____ ____ ____

p_1 p_2 p_3 p_4 p_5

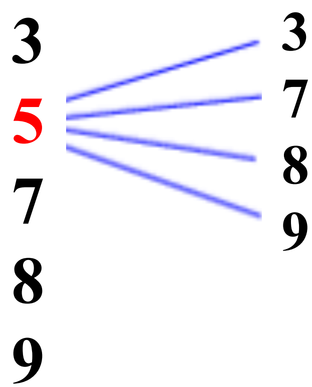
posições dos dígitos no número

Permutações Simples e Circulares

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9 ?

Resolução:



Possibilidades: $\underset{p_1}{\_\_\_\_}$ $\underset{p_2}{\_\_\_\_}$ $\underset{p_3}{\_\_\_\_}$ $\underset{p_4}{\_\_\_\_}$ $\underset{p_5}{\_\_\_\_}$

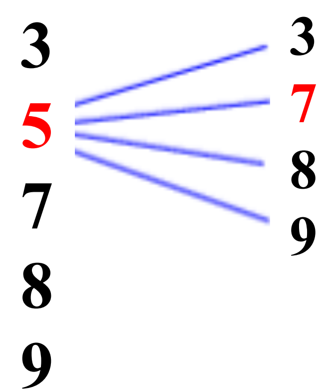
posições dos dígitos no número

Permutações Simples e Circulares

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9 ?

Resolução:



Possibilidades: ____ ____ ____ ____ ____

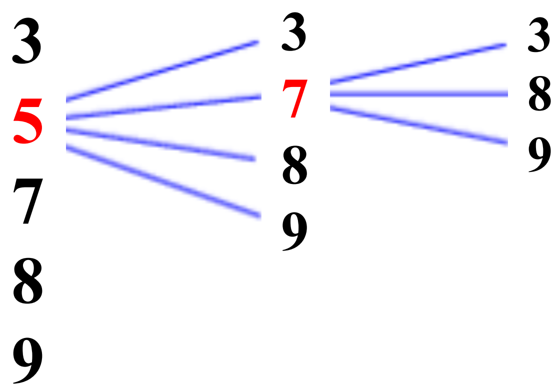
p_1 p_2 p_3 p_4 p_5

posições dos dígitos no número

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9 ?

Resolução:



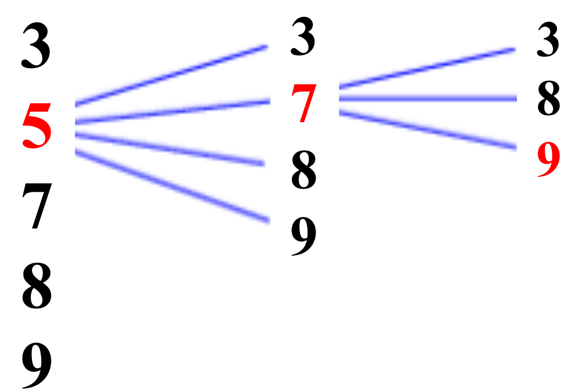
Possibilidades: $\underline{\quad\quad}_{p_1}$ $\underline{\quad\quad}_{p_2}$ $\underline{\quad\quad}_{p_3}$ $\underline{\quad\quad}_{p_4}$ $\underline{\quad\quad}_{p_5}$

posições dos dígitos no número

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9 ?

Resolução:



Possibilidades: ____ ____ ____ ____ ____

p_1 p_2 p_3 p_4 p_5

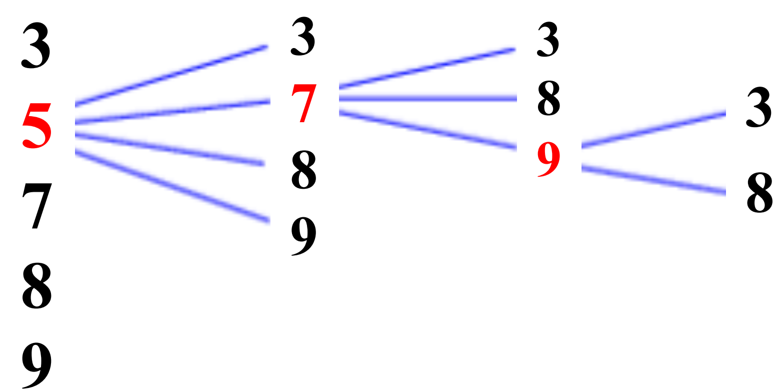
posições dos dígitos no número

Permutações Simples e Circulares

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9 ?

Resolução:



Possibilidades: $\underline{\quad\quad}$ $\underline{\quad\quad}$ $\underline{\quad\quad}$ $\underline{\quad\quad}$ $\underline{\quad\quad}$

p_1 p_2 p_3 p_4 p_5

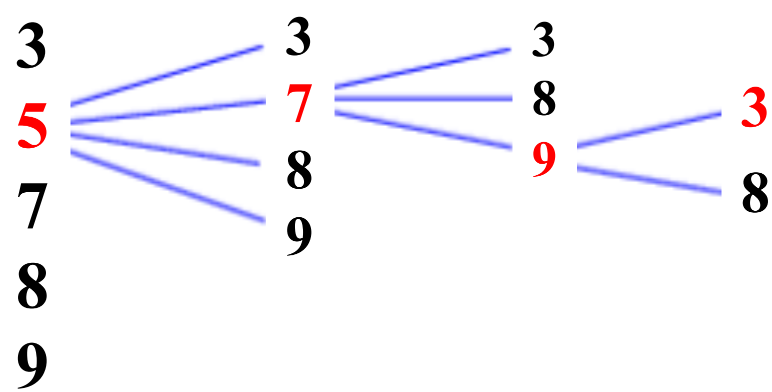
posições dos dígitos no número

Permutações Simples e Circulares

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9 ?

Resolução:



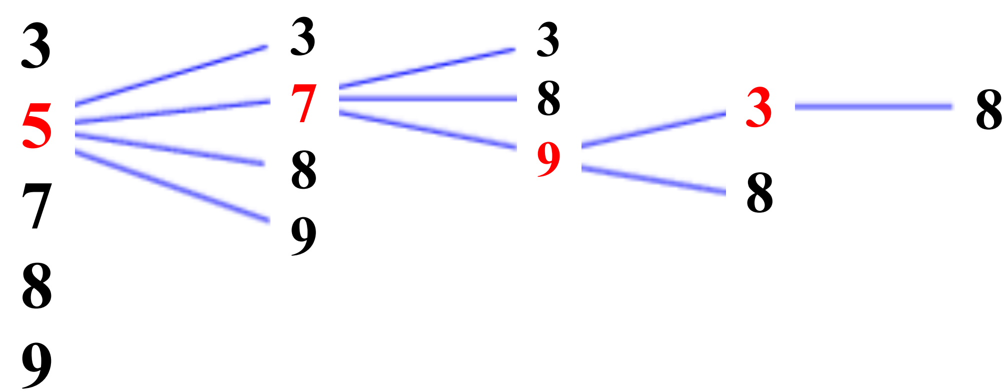
Possibilidades: $\underline{\quad\quad}_{p_1}$ $\underline{\quad\quad}_{p_2}$ $\underline{\quad\quad}_{p_3}$ $\underline{\quad\quad}_{p_4}$ $\underline{\quad\quad}_{p_5}$

posições dos dígitos no número

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9 ?

Resolução:



Possibilidades: $\underset{p_1}{\underline{\qquad}}$ $\underset{p_2}{\underline{\qquad}}$ $\underset{p_3}{\underline{\qquad}}$ $\underset{p_4}{\underline{\qquad}}$ $\underset{p_5}{\underline{\qquad}}$

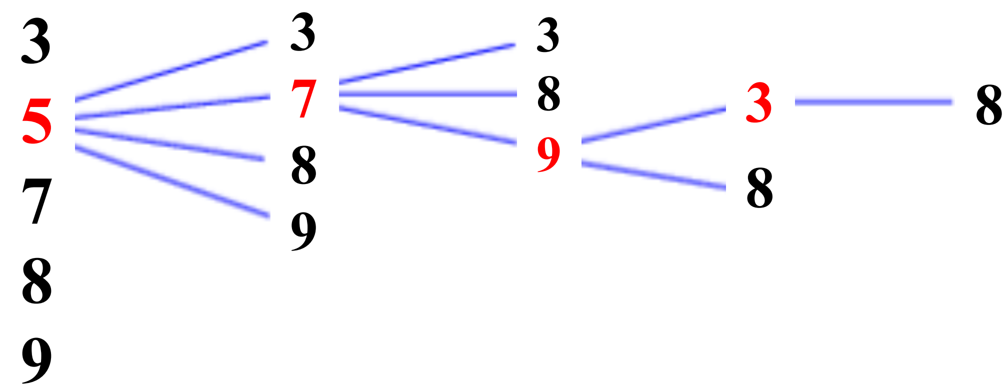
posições dos dígitos no número

Permutações Simples e Circulares

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9 ?

Resolução:



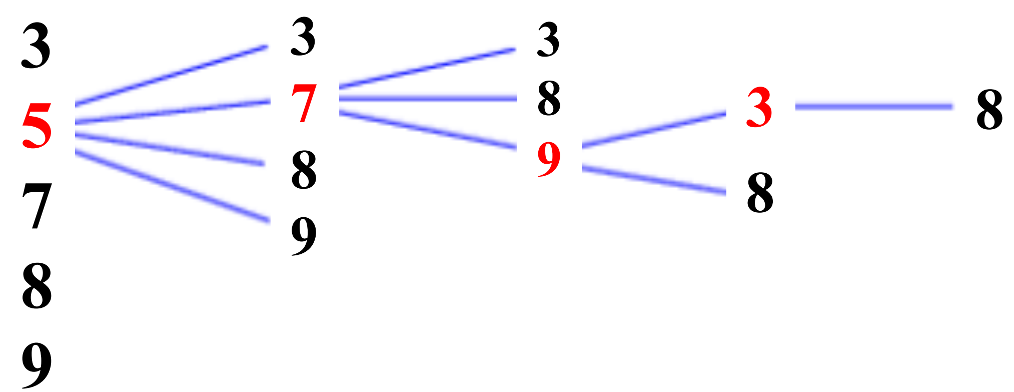
Possibilidades: $\underset{p_1}{\underline{\;5\;}}$ $\underset{p_2}{\underline{\;4\;}}$ $\underset{p_3}{\underline{\;3\;}}$ $\underset{p_4}{\underline{\;2\;}}$ $\underset{p_5}{\underline{\;1\;}}$

posições dos dígitos no número

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9 ?

Resolução:



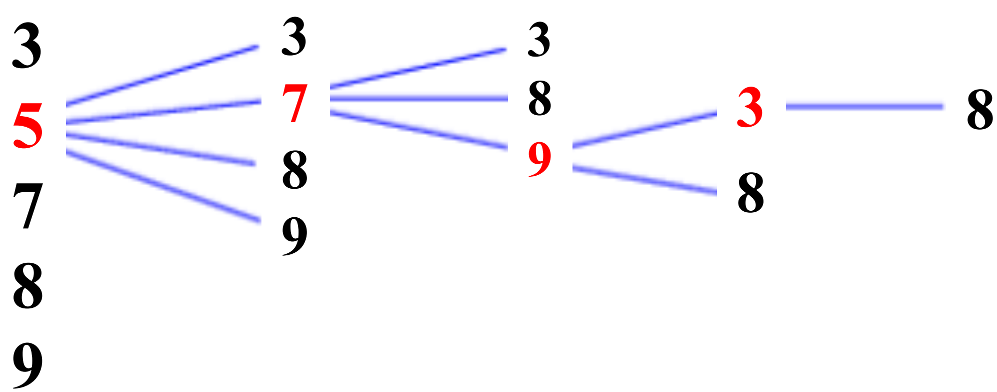
Possibilidades: $\underset{p_1}{\underline{\ 5\ }}\quad \underset{p_2}{\underline{\ 4\ }}\quad \underset{p_3}{\underline{\ 3\ }}\quad \underset{p_4}{\underline{\ 2\ }}\quad \underset{p_5}{\underline{\ 1\ }} = 5!$

posições dos dígitos no número

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9 ?

Resolução:



Possibilidades: $\underset{p_1}{\underline{\;5\;}}\quad \underset{p_2}{\underline{\;4\;}}\quad \underset{p_3}{\underline{\;3\;}}\quad \underset{p_4}{\underline{\;2\;}}\quad \underset{p_5}{\underline{\;1\;}} = 5!$

posições dos dígitos no número

Resposta: Podem se formar $5! = 120$ números diferentes de 5 algarismos.

Permutações Simples e Circulares

- Características dos exemplos:
  - Os elementos considerados são diferentes

Permutações Simples e Circulares

Características dos exemplos:

- Os elementos considerados são diferentes
- Cada troca de posição (de ordem) dos elementos corresponde a uma possibilidade

Permutações Simples e Circulares

Características dos exemplos:

- Os elementos considerados são diferentes
- Cada troca de posição (de ordem) dos elementos corresponde a uma possibilidade
- Na obtenção do número de possibilidades aplica-se os princípios aditivo e multiplicativo

Definição

Dados n objetos distintos, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, uma permutação simples é uma ordenação desses elementos.

Permutações Simples

Definição

Dados n objetos distintos, a_1, a_2, ... , a_n, uma permutação simples é uma ordenação desses elementos.

Ilustração

Dados os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9,

87539 é uma permutação simples de 3, 5, 7, 8, 9.

Número de permutações simples:

➡ Problema

Dados n elementos distintos, a_1, a_2, ... , a_n,

encontrar o número de permutações simples

Permutações Simples

Número de permutações simples:

Problema

Dados n elementos distintos, $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

encontrar o número de permutações simples

Propriedade

O número de permutações simples de n elementos distintos, denominado P_n, é dado por:

$$P_n = n! = n(n-1) \ldots 1$$

Permutações Simples

Exemplo 3:

Vários amigos combinaram passar o dia no clube. Planejaram ir para a piscina, fazer um churrasco e jogar volei. De quantas maneiras diferentes podem programar essas atividades?

Permutações Simples

Exemplo 3:

Vários amigos combinaram passar o dia no clube. Planejaram ir para a piscina, fazer um churrasco e jogar volei. De quantas maneiras diferentes podem programar essas atividades?

Resolução:

elementos: p (piscina) c (churrasco) v (volei)

Permutações Simples

Exemplo 3:

Vários amigos combinaram passar o dia no clube. Planejaram ir para a piscina, fazer um churrasco e jogar volei. De quantas maneiras diferentes podem programar essas atividades?

Resolução:

elementos: p (piscina) c (churrasco) v (volei)

número de programas possíveis: $P_3 = 3! = 6$

Resposta:

Eles podem programar as atividades planejadas de 6 maneiras diferentes.

Exemplo 4:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 0, 5, 7, 8 e 9 ?

Permutações Simples

Exemplo 4:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 0, 5, 7, 8 e 9 ?

⇨ Lembremos que <u>algarismo</u> é cada um dos símbolos usados na representação de um número no sistema decimal de numeração.

Permutações Simples

Exemplo 4:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 0, 5, 7, 8 e 9 ?

Lembremos que <u>algarismo</u> é cada um dos símbolos usados na representação de um número no sistema decimal de numeração.

- Ilustração:

$$57809 \rightarrow 5 \,.\, 10^4 + 7 \,.\, 10^3 + 8 \,.\, 10^2 + 0 \,.\, 10^1 + 9 \,.\, 10^0$$

Exemplo 4:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 0, 5, 7, 8 e 9 ?

Lembremos que algarismo é cada um dos símbolos usados na representação de um número no sistema decimal de numeração.

- Ilustração:

$57809 \rightarrow 5 \,.\, 10^4 + 7 \,.\, 10^3 + 8 \,.\, 10^2 + 0 \,.\, 10^1 + 9 \,.\, 10^0$

05789 é uma ordenação de 5 dígitos que não corresponde à representação no sistema decimal

Permutações Simples

Exemplo 4:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 0, 5, 7, 8 e 9 ?

- Lembremos que algarismo é cada um dos símbolos usados na representação de um número no sistema decimal de numeração.
  - Ilustração:

    $57809 \rightarrow 5 \,.\, 10^4 + 7 \,.\, 10^3 + 8 \,.\, 10^2 + 0 \,.\, 10^1 + 9 \,.\, 10^0$

    05789 é uma ordenação de 5 dígitos que não corresponde à representação no sistema decimal

    5789 corresponde à representação no sistema decimal

Permutações Simples

Exemplo 4:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 0, 5, 7, 8 e 9 ?

Lembremos que algarismo é cada um dos símbolos usados na representação de um número no sistema decimal de numeração.

- Ilustração:

$57809 \rightarrow 5 \,.\, 10^4 + 7 \,.\, 10^3 + 8 \,.\, 10^2 + 0 \,.\, 10^1 + 9 \,.\, 10^0$

05789 é uma ordenação de 5 dígitos que não corresponde à representação no sistema decimal

5789 corresponde à representação no sistema decimal

Conclusão:

Os números de 5 algarismos não iniciam com 0.

Exemplo 4 (resolução):

Raciocínio 1:

dígitos do problema: 0, 5, 7, 8, 9

Exemplo 4 (resolução):

Raciocínio 1:

dígitos do problema: 0, 5, 7, 8, 9

Possibilidades $\underset{\cancel{0}}{\overset{4}{\_\_}} \times \overbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}^{P_4} = 4 \,.\, 4! = 96$

posições dos dígitos no número

Exemplo 4 (resolução):

Raciocínio 1:

dígitos do problema: 0, 5, 7, 8, 9

Possibilidades $\underset{\cancel{0}}{\overset{4}{\_\_\_}} \times \overbrace{\_\_\_ \ \_\_\_ \ \_\_\_ \ \_\_\_}^{P_4} = 4 \,.\, 4! = 96$

posições dos dígitos
no número

- Na primeira posição temos 4 possibilidades (excluimos o 0)
- Nas posições restantes temos 4 posições para 4 dígitos incluindo o 0, ou seja, P_4 possibilidades

Permutações Simples

Exemplo 4 (resolução):

Raciocínio 1:

dígitos do problema: 0, 5, 7, 8, 9

Possibilidades $\underset{\cancel{0}}{\underline{\ 4\ }} \times \overbrace{\underline{\quad}\ \ \underline{\quad}\ \ \underline{\quad}\ \ \underline{\quad}}^{P_4} = 4 \,.\, 4! = 96$

posições dos dígitos
no número

- Na primeira posição temos 4 possibilidades (excluimos o 0)
- Nas posições restantes temos 4 posições para 4 dígitos incluindo o 0, ou seja, P_4 possibilidades

Resposta: Podem se formar 96 números diferentes de 5 algarismos com 0, 5, 7, 8 e 9.

Exemplo 4 (raciocínio 2):

Usamos o conceito de complemento.

Exemplo 4 (raciocínio 2):

Usamos o conceito de complemento.

U: conjunto universo := conjunto das ordenações de 5 dígitos formados com 0, 5, 7, 8 e 9 sem repetição (05798 ∈ U)

Exemplo 4 (raciocínio 2):

Usamos o conceito de complemento.

U: conjunto universo := conjunto das ordenações de 5 dígitos formados com 0, 5, 7, 8 e 9 sem repetição (05798 $\in$ U)

A := conjunto dos números de 5 algarismos formados com 0, 5, 7, 8 e 9 = conjunto dos elementos de U que não iniciam com 0.

Permutações Simples

Exemplo 4 (raciocínio 2):

Usamos o conceito de complemento.

U: conjunto universo := conjunto das ordenações de 5 dígitos formados com 0, 5, 7, 8 e 9 sem repetição (05798 $\in$ U)

A := conjunto dos números de 5 algarismos formados com 0, 5, 7, 8 e 9 = conjunto dos elementos de U que não iniciam com 0.

B := conjunto dos elementos de U que iniciam com 0.

Exemplo 4 (raciocínio 2):

Usamos o conceito de complemento.

U: conjunto universo := conjunto das ordenações de 5 dígitos formados com 0, 5, 7, 8 e 9 sem repetição ($05798 \in U$)

A := conjunto dos números de 5 algarismos formados com 0, 5, 7, 8 e 9 = conjunto dos elementos de U que não iniciam com 0.

B := conjunto dos elementos de U que iniciam com 0.

$$\begin{cases} A = U - B \\ \text{número de possibilidades} = |A| = |U| - |B| \end{cases}$$

Permutações Simples

Exemplo 4 (raciocínio 2):

Usamos o conceito de complemento.

U: conjunto universo := conjunto das ordenações de 5 dígitos formados com 0, 5, 7, 8 e 9 sem repetição $(05798 \in U)$

A := conjunto dos números de 5 algarismos formados com 0, 5, 7, 8 e 9 = conjunto dos elementos de U que não iniciam com 0.

B := conjunto dos elementos de U que iniciam com 0.

$$\begin{cases} A = U - B \\ \text{número de possibilidades} = |A| = |U| - |B| \end{cases}$$

$$\begin{cases} |U| = P_5 \ , \ |B| = P_4 \\ \text{número de possibilidades} = P_5 - P_4 = 5! - 4! = 96 \end{cases}$$

Permutações Simples

Exemplo 4 (raciocínio 2):

Usamos o conceito de complemento.

U: conjunto universo := conjunto das ordenações de 5 dígitos formados com 0, 5, 7, 8 e 9 sem repetição $(05798 \in U)$

A := conjunto dos números de 5 algarismos formados com 0, 5, 7, 8 e 9 = conjunto dos elementos de U que não iniciam com 0.

B := conjunto dos elementos de U que iniciam com 0.

$$\begin{cases} A = U - B \\ \text{número de possibilidades} = |A| = |U| - |B| \end{cases}$$

$$\begin{cases} |U| = P_5 \;,\; |B| = P_4 \\ \text{número de possibilidades} = P_5 - P_4 = 5! - 4! = 96 \end{cases}$$

Observação: $5! - 4! = 5.4! - 4! = (5-1)\,4! = 4.4!$

Permutações Simples

Exemplo 5:

Nove amigos assistem a um show, com lugares marcados consecutivos. As mulheres (quatro) se sentam todas juntas e os homens também. De quantas maneiras diferentes podem se sentar?

Exemplo 5:

Nove amigos assistem a um show, com lugares marcados consecutivos. As mulheres (quatro) se sentam todas juntas e os homens também. De quantas maneiras diferentes podem se sentar?

Resolução: mulheres M_1 , M_2 , M_3 . M_4

homens H_1 , H_2 , H_3 . H_4 , H_5

Permutações Simples

Exemplo 5:

Nove amigos assistem a um show, com lugares marcados consecutivos. As mulheres (quatro) se sentam todas juntas e os homens também. De quantas maneiras diferentes podem se sentar?

Resolução: mulheres M_1 , M_2 , M_3 . M_4

homens H_1 , H_2 , H_3 . H_4 , H_5

Algumas possibilidades: M_1 , M_2 , M_3 . M_4 , H_1 , H_2 , H_3 . H_4 , H_5

Permutações Simples

Exemplo 5:

Nove amigos assistem a um show, com lugares marcados consecutivos. As mulheres (quatro) se sentam todas juntas e os homens também. De quantas maneiras diferentes podem se sentar?

Resolução: mulheres M_1 , M_2 , M_3 . M_4

homens H_1 , H_2 , H_3 . H_4 , H_5

Algumas possibilidades: M_1 , M_2 , M_3 . M_4 , H_1 , H_2 , H_3 . H_4 , H_5

H_1 , H_2 , H_3 . H_4 , H_5 , M_1 , M_2 , M_3 . M_4

Permutações Simples

Exemplo 5:

Nove amigos assistem a um show, com lugares marcados consecutivos. As mulheres (quatro) se sentam todas juntas e os homens também. De quantas maneiras diferentes podem se sentar?

Resolução: mulheres M_1 , M_2 , M_3 . M_4

homens H_1 , H_2 , H_3 . H_4 , H_5

Algumas possibilidades: M_1 , M_2 , M_3 . M_4 , H_1 , H_2 , H_3 . H_4 , H_5

H_1 , H_2 , H_3 . H_4 , H_5 , M_1 , M_2 , M_3 . M_4

Número de possibilidades: $2P_4P_5 = 2 \,.\, 4! \,.\, 5! = 5760$

Exemplo 5:

Nove amigos assistem a um show, com lugares marcados consecutivos. As mulheres (quatro) se sentam todas juntas e os homens também. De quantas maneiras diferentes podem se sentar?

Resolução: mulheres $M_1 , M_2 , M_3 . M_4$

homens $H_1 , H_2 , H_3 . H_4 , H_5$

Algumas possibilidades: $M_1 , M_2 , M_3 . M_4 , H_1 , H_2 , H_3 . H_4 , H_5$

$H_1 , H_2 , H_3 . H_4 , H_5 , M_1 , M_2 , M_3 . M_4$

Número de possibilidades: $2P_4P_5 = 2 \cdot 4! \cdot 5! = 5760$

Resposta: Podem se sentar de 5760 maneiras diferentes.

Exemplo 6:

De quantos modos **4** rapazes e **4** moças podem se sentar em 4 bancos de 2 lugares cada um, de modo que em cada banco fiquem 1 rapaz e 1 moça?

Permutações Simples

Exemplo 6:

De quantos modos **4** rapazes e **4** moças podem se sentar em 4 bancos de 2 lugares cada um, de modo que em cada banco fiquem 1 rapaz e 1 moça?

Resolução:

(bancos)

Exemplo 6:

De quantos modos **4** rapazes e **4** moças podem se sentar em 4 bancos de 2 lugares cada um, de modo que em cada banco fiquem 1 rapaz e 1 moça?

Resolução:

(bancos)

1ª moça pode escolher seu lugar de 8 modos

Exemplo 6:

De quantos modos **4** rapazes e **4** moças podem se sentar em 4 bancos de 2 lugares cada um, de modo que em cada banco fiquem 1 rapaz e 1 moça?

Resolução:

(bancos)

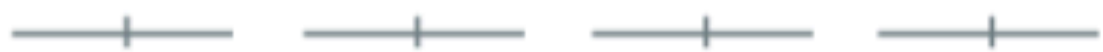
1ª moça pode escolher seu lugar de 8 modos

2ª moça pode escolher seu lugar de 6 modos

Exemplo 6:

De quantos modos **4** rapazes e **4** moças podem se sentar em 4 bancos de 2 lugares cada um, de modo que em cada banco fiquem 1 rapaz e 1 moça?

Resolução:



(bancos)

1ª moça pode escolher seu lugar de 8 modos

2ª moça pode escolher seu lugar de 6 modos

3ª moça pode escolher seu lugar de 4 modos

Exemplo 6:

De quantos modos **4** rapazes e **4** moças podem se sentar em 4 bancos de 2 lugares cada um, de modo que em cada banco fiquem 1 rapaz e 1 moça?

Resolução:

(bancos)

1ª moça pode escolher seu lugar de 8 modos

2ª moça pode escolher seu lugar de 6 modos

3ª moça pode escolher seu lugar de 4 modos

4ª moça pode escolher seu lugar de 2 modos

Permutações Simples

Exemplo 6 (continuação):

Considere uma colocação das moças.

Exemplo 6 (continuação):

Considere uma colocação das moças.

Para cada colocação das moças, os moços sentam de P_4 maneiras diferentes nos 4 lugares restantes.

Permutações Simples

Exemplo 6 (continuação):

Considere uma colocação das moças.

Para cada colocação das moças, os moços sentam de P_4 maneiras diferentes nos 4 lugares restantes.

Número total de possibilidades: $8 \,.\, 6 \,.\, 4 \,.\, 2 \,.\, 4! = 9216$

Exemplo 6 (continuação):

Considere uma colocação das moças.

Para cada colocação das moças, os moços sentam de P_4 maneiras diferentes nos 4 lugares restantes.

Número total de possibilidades: $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4! = 9216$

Resposta: Podem se sentar de 9216 maneiras diferentes.

Permutações Simples

Exemplo 6 (continuação):

Considere uma colocação das moças.

Para cada colocação das moças, os moços sentam de P_4 maneiras diferentes nos 4 lugares restantes.

Número total de possibilidades: $8 \,.\, 6 \,.\, 4 \,.\, 2 \,.\, 4! = 9216$

Resposta: Podem se sentar de 9216 maneiras diferentes.

- Observação: A resposta não muda se analisarmos primeiro os rapazes ($8 \,.\, 6 \,.\, 4 \,.\, 2$ modos) e depois as moças ($4!$)

Permutações Simples

Exemplo 7:

Quantos anagramas podem ser formados com a palavra VIRUS?

Permutações Simples

Exemplo 7:

Quantos anagramas podem ser formados com a palavra VIRUS?

Resolução:

- 1 anagrama de VIRUS: 1 transposição das letras de VIRUS (permutação das letras de VIRUS)

Permutações Simples

Exemplo 7:

Quantos anagramas podem ser formados com a palavra VIRUS?

Resolução:

- 1 anagrama de VIRUS: 1 transposição das letras de VIRUS (permutação das letras de VIRUS)
- VIRUS tem letras distintas

Permutações Simples

Exemplo 7:

Quantos anagramas podem ser formados com a palavra VIRUS?

Resolução:

- 1 anagrama de VIRUS: 1 transposição das letras de VIRUS (permutação das letras de VIRUS)
- VIRUS tem letras distintas
- **n**: número de letras da palavra VIRUS = **5**

Exemplo 7:

Quantos anagramas podem ser formados com a palavra VIRUS?

Resolução:

- 1 anagrama de VIRUS: 1 transposição das letras de VIRUS (permutação das letras de VIRUS)
- VIRUS tem letras distintas
- **n**: número de letras da palavra VIRUS = **5**

Resposta:

A partir da palavra VIRUS podem ser formados $P_5 = 5! = 120$ anagramas.

Exemplo 8:

Quantos anagramas da palavra VIRUS começam e terminam em consoante?

Exemplo 8:

Quantos anagramas da palavra VIRUS começam e terminam em consoante?

Resolução:

$$\overline{\quad p_1 \quad} \qquad \overline{\quad p_2 \quad} \qquad \overline{\quad p_3 \quad} \qquad \overline{\quad p_4 \quad} \qquad \overline{\quad p_5 \quad}$$

posição das letras em um anagrama

Exemplo 8:

Quantos anagramas da palavra VIRUS começam e terminam em consoante?

Resolução:

$\underline{\quad\quad}$ $\underline{\quad\quad}$ $\underline{\quad\quad}$ $\underline{\quad\quad}$ $\underline{\quad\quad}$

p_1 p_2 p_3 p_4 p_5

posição das letras em um anagrama

consoantes de VIRUS: V, R, S

Permutações Simples

Exemplo 8:

Quantos anagramas da palavra VIRUS começam e terminam em consoante?

Resolução:

$\overline{p_1}$ $\quad$ $\overline{p_2}$ $\quad$ $\overline{p_3}$ $\quad$ $\overline{p_4}$ $\quad$ $\overline{p_5}$

posição das letras em um anagrama

consoantes de VIRUS: V, R, S

Ordem da análise das possibilidades:

1ª) possibilidades para a posição p_1

Exemplo 8:

Quantos anagramas da palavra VIRUS começam e terminam em consoante?

Resolução:

$$\underset{p_1}{\_\_\_} \quad \underset{p_2}{\_\_\_} \quad \underset{p_3}{\_\_\_} \quad \underset{p_4}{\_\_\_} \quad \underset{p_5}{\_\_\_}$$

posição das letras em um anagrama

consoantes de VIRUS: V, R, S

Ordem da análise das possibilidades:

1ª) possibilidades para a posição p_1

2ª) possibilidades para a posição p_5

Permutações Simples

Exemplo 8:

Quantos anagramas da palavra VIRUS começam e terminam em consoante?

Resolução:

$\underset{p_1}{\_\_\_} \quad \underset{p_2}{\_\_\_} \quad \underset{p_3}{\_\_\_} \quad \underset{p_4}{\_\_\_} \quad \underset{p_5}{\_\_\_}$

posição das letras em um anagrama

consoantes de VIRUS: V, R, S

Ordem da análise das possibilidades:

1ª) possibilidades para a posição p_1

2ª) possibilidades para a posição p_5

3ª) possibilidades para as posições p_2 , p_3 , p_4

Exemplo 8:

Quantos anagramas da palavra VIRUS começam e terminam em consoante?

Resolução:

$\underline{\quad\quad}$ $\underline{\quad\quad}$ $\underline{\quad\quad}$ $\underline{\quad\quad}$ $\underline{\quad\quad}$

p_1 p_2 p_3 p_4 p_5

posição das letras em um anagrama

consoantes de VIRUS: V, R, S

Ordem da análise das possibilidades:

1ª) possibilidades para a posição $p_1 = 3$

2ª) possibilidades para a posição p_5

3ª) possibilidades para as posições p_2 , p_3 , p_4

Permutações Simples

Exemplo 8:

Quantos anagramas da palavra VIRUS começam e terminam em consoante?

Resolução:

$$\underset{p_1}{\_\_\_} \quad \underset{p_2}{\_\_\_} \quad \underset{p_3}{\_\_\_} \quad \underset{p_4}{\_\_\_} \quad \underset{p_5}{\_\_\_}$$

posição das letras em um anagrama

consoantes de VIRUS: V, R, S

Ordem da análise das possibilidades:

1ª) possibilidades para a posição $p_1 = 3$

2ª) possibilidades para a posição $p_5 = 2$

3ª) possibilidades para as posições p_2 , p_3 , p_4

Permutações Simples

Exemplo 8:

Quantos anagramas da palavra VIRUS começam e terminam em consoante?

Resolução:

$$\underline{\quad}_{p_1} \quad \underline{\quad}_{p_2} \quad \underline{\quad}_{p_3} \quad \underline{\quad}_{p_4} \quad \underline{\quad}_{p_5}$$

posição das letras em um anagrama

consoantes de VIRUS: V, R, S

Ordem da análise das possibilidades:

1ª) possibilidades para a posição $p_1 = 3$

2ª) possibilidades para a posição $p_5 = 2$

3ª) possibilidades para as posições p_2, p_3, $p_4 = P_3 = 3!$

Exemplo 8:

Quantos anagramas da palavra VIRUS começam e terminam em consoante?

Resolução:

$$\underset{p_1}{\underline{\quad 3 \quad}} \times \overbrace{\underset{p_2}{\underline{\qquad}} \quad \underset{p_3}{\underline{\qquad}} \quad \underset{p_4}{\underline{\qquad}}}^{P_3} \times \underset{p_5}{\underline{\quad 2 \quad}}$$

posição das letras em um anagrama

consoantes de VIRUS: V, R, S

Ordem da análise das possibilidades:

1ª) possibilidades para a posição $p_1 = 3$

2ª) possibilidades para a posição $p_5 = 2$

3ª) possibilidades para as posições p_2 , p_3 , $p_4 = P_3 = 3!$

Permutações Simples

Exemplo 8 (continuação):

Resposta: da palavra VIRUS podem ser formados $3 \, . \, 2 \, . \, 3! \; = $ 36 anagramas que começam e terminam em consoante.

Permutações Simples

Exemplo 9:

Ana, Luis e Fernando sentam-se juntos na aula de monitoria do curso de informática. De quantas maneiras diferentes podem se sentar, se:

(1) as cadeiras estão numa mesma fila

(2) as cadeiras formam um triângulo e estão numeradas.

(3) as cadeiras formam um triângulo e o que interessa é a posição de cada pessoa em relação as outras duas.

Permutações Simples

Exemplo 9:

Ana, Luis e Fernando sentam-se juntos na aula de monitoria do curso de informática. De quantas maneiras diferentes podem se sentar, se:

(1) as cadeiras estão numa mesma fila ① ② ③

(2) as cadeiras formam um triângulo e estão numeradas.

(3) as cadeiras formam um triângulo e o que interessa é a posição de cada pessoa em relação as outras duas.

Exemplo 9:

Ana, Luis e Fernando sentam-se juntos na aula de monitoria do curso de informática. De quantas maneiras diferentes podem se sentar, se:

(1) as cadeiras estão numa mesma fila 1 2 3

(2) as cadeiras formam um triângulo e estão numeradas.

1

2 3

(3) as cadeiras formam um triângulo e o que interessa é a posição de cada pessoa em relação as outras duas.

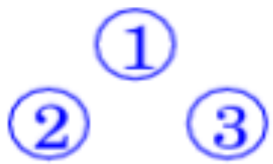
Permutações Simples

Exemplo 9:

Ana, Luis e Fernando sentam-se juntos na aula de monitoria do curso de informática. De quantas maneiras diferentes podem se sentar, se:

(1) as cadeiras estão numa mesma fila   ① ② ③

(2) as cadeiras formam um triângulo e estão numeradas.



(3) as cadeiras formam um triângulo e o que interessa é a posição de cada pessoa em relação as outras duas.

➡ Ilustração:

Permutações Simples

Exemplo 9 (primeira parte):

Ana, Luis e Fernando sentam-se juntos na aula de monitoria do curso de informática. De quantas maneiras diferentes podem-se sentar, se:

(1) as cadeiras estão numa mesma fila ① ② ③

Permutações Simples

Exemplo 9 (primeira parte):

Ana, Luis e Fernando sentam-se juntos na aula de monitoria do curso de informática. De quantas maneiras diferentes podem-se sentar, se:

(1) as cadeiras estão numa mesma fila 1 2 3

Resolução:

Número de possibilidades: $P_3 = 3! = 6$

Resposta: Eles podem se sentar numa fila de **6 maneiras distintas**

Permutações Simples

Exemplo 9 (segunda parte):

Ana, Luis e Fernando sentam-se juntos na aula de monitoria do curso de informática. De quantas maneiras diferentes podem se sentar, se:

(2) as cadeiras formam um triângulo e estão numerados

1

2 3

Permutações Simples

Exemplo 9 (segunda parte):

Ana, Luis e Fernando sentam-se juntos na aula de monitoria do curso de informática. De quantas maneiras diferentes podem se sentar, se:

(2) as cadeiras formam um triângulo e estão numerados

1

2 3

Resolução: Importa a cadeira em que estão sentados:

- Ilustração:

A F L

L F A L F A

possibilidades diferentes

Permutações Simples

Exemplo 9 (segunda parte):

Ana, Luis e Fernando sentam-se juntos na aula de monitoria do curso de informática. De quantas maneiras diferentes podem se sentar, se:

(2) as cadeiras formam um triângulo e estão numerados

1
2 3

Resolução: Importa a cadeira em que estão sentados:

- Ilustração:

A	F	L
L F	A L	F A

possibilidades diferentes

Resposta: Eles podem se sentar nos <u>lugares numerados</u> de 6 maneiras distintas

Permutações Simples

Exemplo 9 (terceira parte):

Ana, Luis e fernando sentam-se juntos na aula de monitoria do curso de informática. De quantas maneiras diferentes podem se sentar, se:

(3) as cadeiras formam um triângulo e o que interessa é a posição de cada pessoa em relação as outras duas

A	L	F		
F L	A F	L A	$\xrightarrow{\text{correspondem}}$	uma possibilidade

Permutações Simples

Exemplo 9 (terceira parte):

Ana, Luis e fernando sentam-se juntos na aula de monitoria do curso de informática. De quantas maneiras diferentes podem se sentar, se:

(3) as cadeiras formam um triângulo e o que interessa é a posição de cada pessoa em relação as outras duas

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ F & & L \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & L & \\ A & & F \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & F & \\ L & & A \end{array} \xrightarrow{\text{correspondem}} \text{uma possibilidade}$$

Permutações Simples

Exemplo 9 (terceira parte):

Ana, Luis e fernando sentam-se juntos na aula de monitoria do curso de informática. De quantas maneiras diferentes podem se sentar, se:

(3) as cadeiras formam um triângulo e o que interessa é a posição de cada pessoa em relação as outras duas

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ F & & L \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & L & \\ A & & F \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & F & \\ L & & A \end{array} \xrightarrow{\text{correspondem}} \text{uma possibilidade}$$

Resolução:

3 permutações de A, L e F $\longrightarrow$ 1 possibilidade

Permutações Simples

Exemplo 9 (terceira parte):

Ana, Luis e fernando sentam-se juntos na aula de monitoria do curso de informática. De quantas maneiras diferentes podem se sentar, se:

(3) as cadeiras formam um triângulo e o que interessa é a posição de cada pessoa em relação as outras duas

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ F & & L \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & L & \\ A & & F \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & F & \\ L & & A \end{array} \quad \xrightarrow{\text{correspondem}} \quad \text{uma possibilidade}$$

Resolução:

$$3 \text{ permutações de A, L e F} \longrightarrow 1 \text{ possibilidade}$$

$$P_3 \text{ permutações de A, L e F} \longrightarrow \frac{P_3}{3} \text{ possibilidades}$$

Permutações Simples

Exemplo 9 (terceira parte):

Ana, Luis e fernando sentam-se juntos na aula de monitoria do curso de informática. De quantas maneiras diferentes podem se sentar, se:

(3) as cadeiras formam um triângulo e o que interessa é a posição de cada pessoa em relação as outras duas

$$\begin{array}{ccc} \;A\; & \;L\; & \;F\; \\ F\quad L & A\quad F & L\quad A \end{array} \xrightarrow{\text{correspondem}} \text{uma possibilidade}$$

Resolução:

$$3 \text{ permutações de A, L e F} \longrightarrow 1 \text{ possibilidade}$$

$$P_3 \text{ permutações de A, L e F} \longrightarrow \frac{P_3}{3} \text{ possibilidades}$$

Resposta:

A quantidade de posições diferentes é $\frac{3!}{3} = \frac{3 \,.\, 2!}{3} = 2$

Permutações Circulares

Permutação circular:

Definição

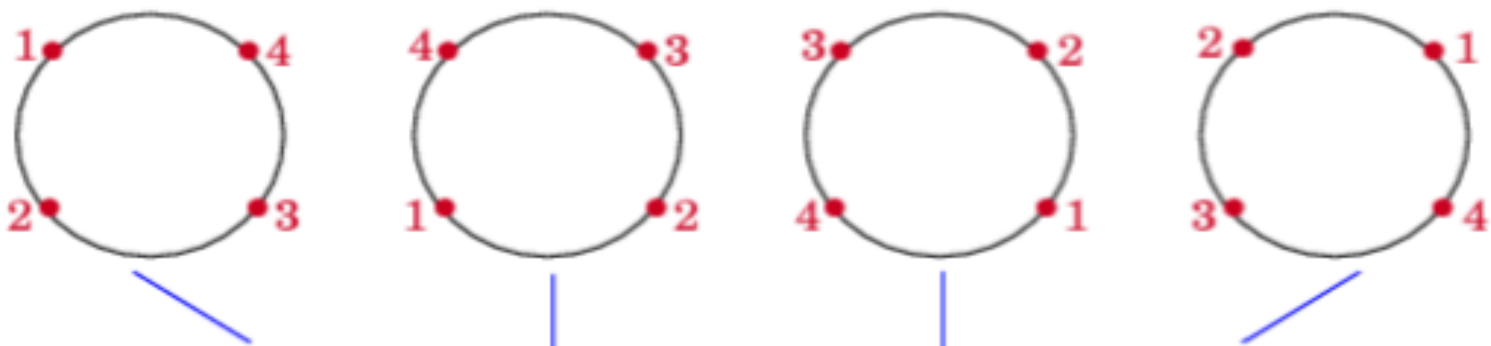
Dados n objetos distintos, a_1, a_2, ... , a_n, uma permutação circular é uma ordenação onde o que importa é a posição relativa dos objetos.

Permutação circular:

- Definição

Dados **n** objetos distintos, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, uma **permutação circular** é uma ordenação onde o que importa é a posição relativa dos objetos.

- Ilustração



correspondem à mesma permutação circular

Observação

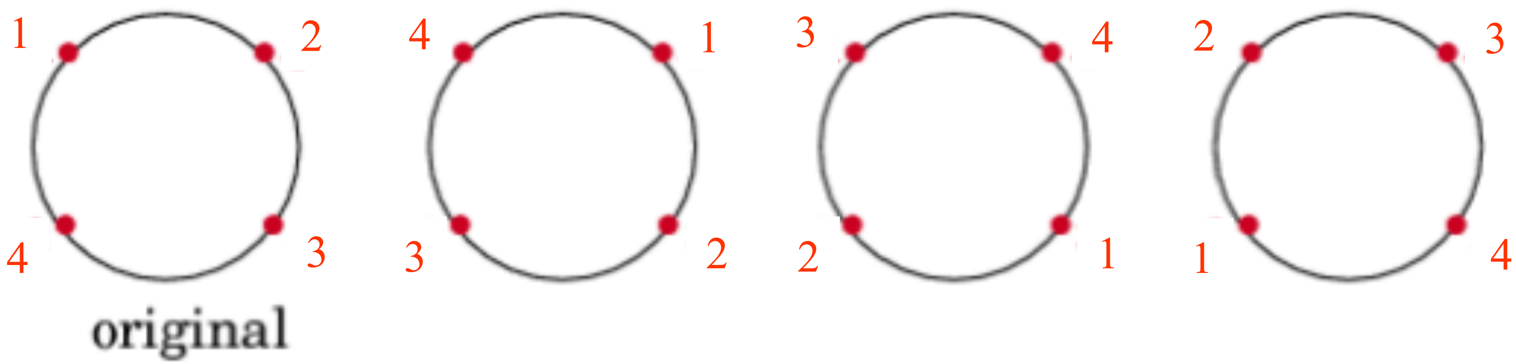
Duas permutações circulares são iguais quando uma pode ser obtida da outra por uma rotação.

Permutações Circulares

Observação

Duas permutações circulares são iguais quando uma pode ser obtida da outra por uma rotação.

Ilustração



Permutações Circulares

Número de permutações circulares:

Problema

Dados n elementos distintos, a_1, a_2, ... , a_n,

encontrar o número de permutações circulares

Permutações Circulares

Número de permutações circulares:

Problema

Dados n elementos distintos, $a_1, a_2, \ldots, a_n$,
encontrar o número de permutações circulares

Propriedade

O número de permutações circulares de n objetos distintos, denominado $(PC)_n$, é dado por:

$$(PC)_n = \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Permutações Circulares

Número de permutações circulares:

- Problema

Dados n elementos distintos, $a_1, a_2, \ldots, a_n$,
encontrar o número de permutações circulares

- Propriedade

O número de permutações circulares de n objetos distintos, denominado $(PC)_n$, é dado por:

$$(PC)_n = \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

- Ilustração

$$(PC)_3 = \frac{3!}{3} = 2! = 2$$

Exemplo 10:

Quantas rodas de ciranda podem ser formadas com 5 crianças?

Permutações Circulares

Exemplo 10:

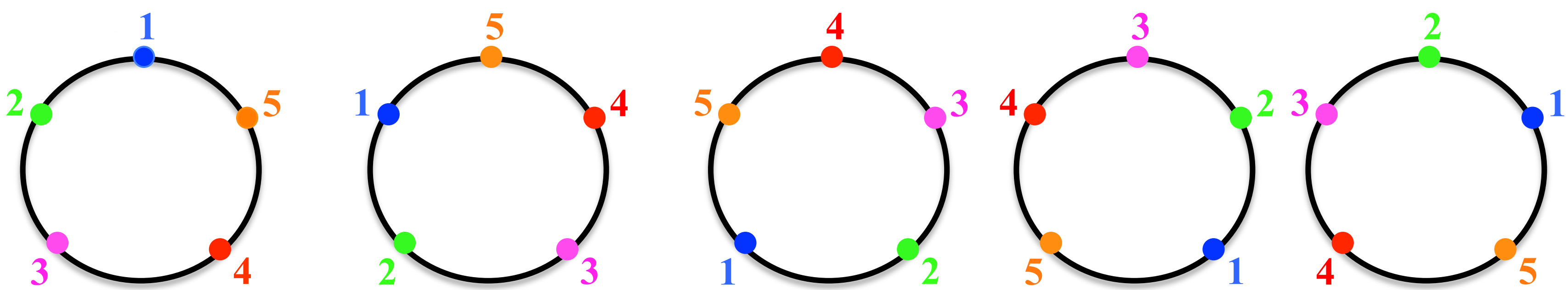
Quantas rodas de ciranda podem ser formadas com 5 crianças?

crianças: 1, 2, 3, 4, 5

Exemplo 10:

Quantas rodas de ciranda podem ser formadas com 5 crianças?

crianças: 1 2 3 4 5



1 2 3 4 5

Permutações Circulares

Exemplo 10 (continuação):

Resolução:

$$\left.\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1\\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2\\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3\\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4\end{matrix}\right\}\ \begin{matrix}\text{permutações}\\ \text{simples}\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}\text{1 permutação}\\ \text{circular}\end{matrix}$$

Permutações Circulares

Exemplo 10 (continuação):

Resolução:

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}\right\} \text{permutações simples} \longrightarrow \text{1 permutação circular}$$

5 permutações simples $\longrightarrow$ 1 permutação circular

Permutações Circulares

Exemplo 10 (continuação):

Resolução:

$$\left.\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right\} \text{permutações simples} \longrightarrow \text{1 permutação circular}$$

5 permutações simples $\longrightarrow$ 1 permutação circular

total de permutações, $P_5 \longrightarrow \dfrac{P_5}{5} = (PC)_5$

Permutações Circulares

Exemplo 10 (continuação):

Resolução:

$$\left.\begin{array}{c} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1 \\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2 \\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3 \\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4 \end{array}\right\} \text{permutações simples} \longrightarrow \text{1 permutação circular}$$

5 permutações simples $\longrightarrow$ 1 permutação circular

total de permutações, $P_5 \longrightarrow \dfrac{P_5}{5} = (PC)_5$

$$\frac{P_5}{5} = \frac{5!}{5} = 4! = 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 24$$

Permutações Circulares

Exemplo 10 (continuação):

Resolução:

$$\left.\begin{matrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1 \\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2 \\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3 \\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4 \end{matrix}\right\} \text{permutações simples} \longrightarrow \text{1 permutação circular}$$

5 permutações simples $\longrightarrow$ 1 permutação circular

total de permutações, $P_5 \longrightarrow \dfrac{P_5}{5} = (PC)_5$

$$\frac{P_5}{5} = \frac{5!}{5} = 4! = 4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 24$$

Resposta:

Podem ser formadas 24 rodas diferentes de ciranda

Exemplo 11:

De quantas maneiras é possível formar uma roda de ciranda com 6 crianças, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 e c_6 de modo que c_1 e c_2 não fiquem juntas?

Exemplo 11:

De quantas maneiras é possível formar uma roda de ciranda com 6 crianças, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 e c_6 de modo que c_1 e c_2 não fiquem juntas?

Resolução:

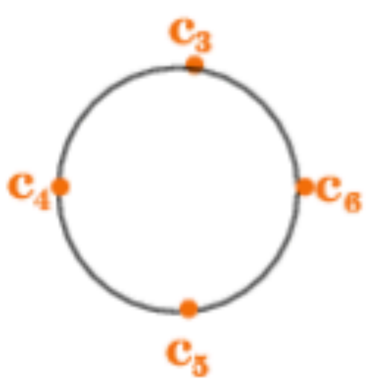
Primeira etapa

Considere c_3, c_4, c_5, c_6. Podem se formar

$$(PC)_4 = (4-1)! = 3! = 6$$

Exemplo 11 (segunda etapa):

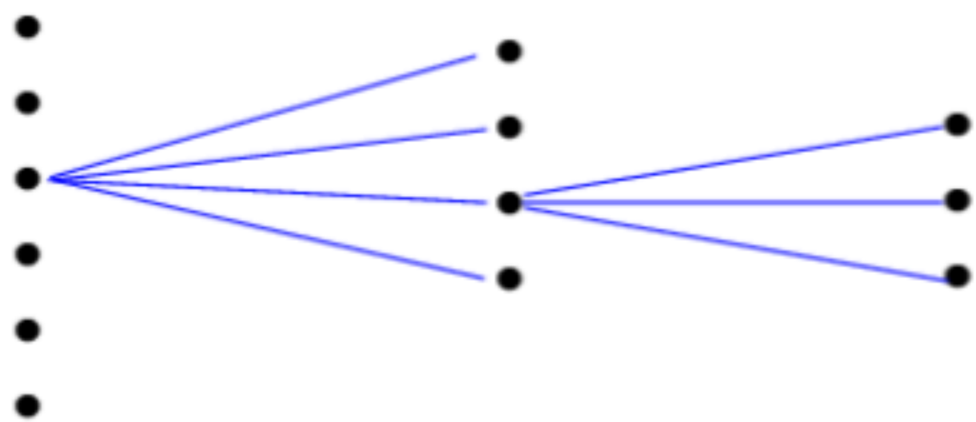
Para cada roda formada por c_3, c_4, c_5, c_6 tem-se 4 maneiras de se colocar c_1



1 roda

Permutações Circulares

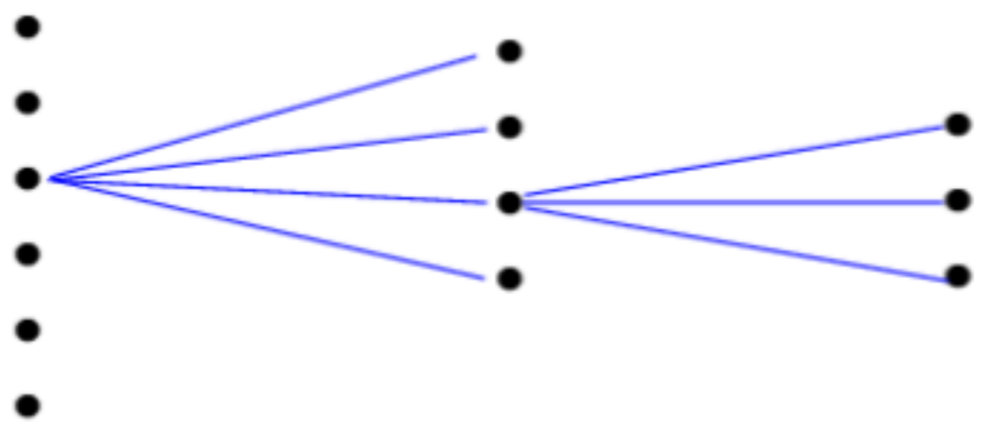
Exemplo 11 (análise final):



$(PC)_4 = 6$	4	3
primeira etapa	segunda etapa	terceira etapa
(c_3, c_4, c_5, c_6)	(inclusão de c_1)	(inclusão de c_2)

Permutações Circulares

Exemplo 11 (análise final):



$(PC)_4 = 6$	4	3
primeira etapa (c_3, c_4, c_5, c_6)	segunda etapa (inclusão de c_1)	terceira etapa (inclusão de c_2)

Resposta:

Podem ser formadas 6 . 4 . 3 = 72 rodas diferentes de modo que c_1 e c_2 não fiquem juntas.